العبارات المركبة في المنطق الرياضي

علي عبدالواحد محمد

في المقال السابق المعنون المسورات ومنطق الرياضيات تمت الإشارة لبعض العبارات المركبة وقيم صدقها ونفيها ، وسنواصل بنوع من الترتيب التنويه عن بعض العبارات المركبة ألأخرى :

***) العبارة المركبة العطف :**

وهي العبارة التي تكون عباراتاها الجزئيتان مربوطتين ب (او) ويرمز له (٧) ، لدراسة قيم الصدق لهذه العبارة لنأخذ المثال التالي :

طفح الكيل أو طار الصواب

هذه العبارة تكون كاذبة في الحالة الوحيدة ، وهي حالة ان الكيل لم يطفح ، والصواب لم يطر

بينما تكون صادقة اذا طفح الكيل ولم يطر الصواب

وتكون صادقة إذا لم يطفح الكيل وطار الصواب

وتكون صادقة إذا طفح الكيل وطار الصواب

وبلغة الرموز : نفرض ان طفح الكيل Ξ ع

نفرض ان طار الصواب Ξ م

إ ذن العبارة طفح الكيل أو طار الصواب Ξ ع ٧ م

لاحظ جدول الصدق التالي :

ع	م	ع٧ م
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

جدول رقم (1)

نرجع الى المثال السابق : طفح الكيل أو طار الصواب

نفي هذه العبارة هو ما (طفح الكيل أو طار الصواب) Ξ ~ (ع ٧ م)

من الحقل العمودي الثالث لجدول رقم (1) نكون الجدول التالي :

ع ٧ م	~(ع ٧ م)
ص	ك
ص	ك
ص	ك
ك	ص

جدول رقم (2)

والآن لو قارنا بين قيم الصدق لنفي عبارة العطف وبين عبارة الضم (تم اختيار العبارتين على اساس إن في الحالتين تكون احتمالات قيم الصدق 3 كاذب و 1 صادق

كما في الجدول التالي :

ع	م	ع ٨ م	~ (ع٨م)	ع٧م	~ (ع٧م)	~ع	~م	~ع٨~م	~ع٧~م
ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ك	ك	ك
ص	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص	ص	ص

جدول رقم (3)

لاحظ في جدول رقم (3) :

قيم الصدق تكون : ك ، ص ، ص ، ص .

وفي الحقل العمودي رقم 10 الأخير والخاص بالعبارة ~ ع ٧ ~ م ، إن قيم الصدق هي ايضا ك ، ص ، ص ، ص .

ولما كانت قيم الصدق في الحالتين متطابقة ، وبنفس التكرار :

إذن ~ (ع ٨ م) Ξ ~ع ٧ ~ م

وبنفس الطريقة نلاحظ عند مقارنة العموديين السادس والتاسع إن

~ (ع ٧ م) Ξ ~ ع ٨ ~ م

الخلاصة :

نفي العبارة الضم Ξ عبارة العطف ولكن عبارتيها الجزئيتين منفيتان

نفي العبارة العطف Ξ عبارة الضم ولكن عبارتيها الجزئيتين منفيتان

كما يلي :

~(ع ٨ م) Ξ ~ع ٧ ~ م

~ (ع ∨ م) ≡ ~ ع ∧ ~ م

حالات خاصة :

* عبارة الأختيار وهي اما او ويرمز لها بالرمز (∨̃) ويفضل ان يكون الخط تحت الرمز ، لاحظ المثال التالي :

الشاعر اما ان يقول قصيدته او يستمع للآخرين

تكون هذه العبارة صادقة في حالتين فقط هما اما القاء القصيدة او الإستماع للشعراء الآخرين، إذ لا يمكن للشاعر ان يلقي قصيدتة ويستمع لقصائد الشعراء الآخرين في آن واحد ، ولايمكنه أن لا يقي قصيدته ولايستمع.

إذن جدول صدق العبارة سيكون :

ع	م	ع ∨̃ م
ص	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

جدول رقم (4)

نفي العبارة الإختيار

ع ∨̃ م	~ (ع ∨̃ م)
ك	ص
ص	ك
ص	ك
ك	ص

جدول رقم (5)

*) عبارة الإ ستثناء ، وهي العبارة التي اداة ربطها تكون لا و لا ويرمز لها بالرمز (↓)

وهي حكمها المنطقي مثل الحكم المنطقي لعبارة الضم اي ان لها حالة واحدة صادقة نوضحها بالمثال التالي :

محمد لاناقة له ولاجمل فيما يجري

تكون قيم صدق هذه العبارة هكذا

اذا كان لمحمد ناقة ولة جمل ايضا تكون العبارة كاذبة

اذا كان لمحمد ناقة وليس له جمل تكون العبارة كاذبة

اذا لم يكن لمحمد ناقة ولكن له جمل تكون العبارة كاذبة

اذا لم يكن لمحمد ناقة ولم يكن له جمل تكون العبارة صادقة

لاحظ الجدول التالي :

ع	م	ع ↓ م
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ك

جدول رقم (6)

الجدول يؤكد ان الأستثناء حالة من العبارة الضم

العبارة الشرطية :

هي العبارة المركبة والتي تتشكل من الشرط (الفرض) ومن جواب الشرط (النتيجة)، والتي اداة الربط فيها على شكل (إذا كان ..... فأن .....) او الأدوات الأخرى التي تعني الشرط في العبارة مثل (إذا كقول المتنبي إذا نظرت نيوب الليث بارزة فلا تظن إن الليث يبتسم) أو (من كقول الرصافي من يقرأ الدستور يعلم إنه وفقا لصك الإنتداب مصنف) أو (إن ، لو .....الخ من الأدوات التي تعني الشرط).

يرمز الى الشرط بالعلامة (←) وتقرأ يؤدي الى وتقرأ ايضا يستلزم

مثال : مثل بالرموز العبارة التالية:

إذا حرم الفرد والمجتمع من الحرية فإنه سيمرض مرضا يشل نفسه

الحل :

نفرض ان حرم الفرد والمجتمع من الحرية Ξ ع

نفرض إن سيمرض مرضا يشل نفسه Ξ م

إذا ..... فإنه Ξ ←

العبارة تصبح Ξ ع ← م

قيم صدق عبارة الشرط :

الحالة الوحيدة التي تكون فيها البارة الشرطية كاذبة هي الحالة التي تكون فيها ع صادقة و م كاذبة ، والحالات الأخرى تكون فيها العبارة صادقة .

اي ان العبارة كاذبة إذا كانت النتائج كاذبة والمقدمات (الفرض) صادقة : لاحظ الجدول التالي

ع	م	ع← م
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص

جدول رقم (7)

نفي العبارة الشرطية :

إذا كان لينا العبارة الشرطية ع ← م ، فما هي قيم الصدق للعبارة الشرطية ~ (ع ← م)

لنجد ذلك نرجع الى الحقل العمدي الثالث في جدول رقم (7) ونكون الجدول التالي :

ع← م	~ (ع ← م)
ص	ك
ك	ص
ص	ك
ص	ك

جدول رقم (8)

الحقل العمودي الثاني من الجدول رقم (8) يعطي قيم صدق إحتمالاتها 3 ك ، 1 ص وهي إحتمالات الصدق ، التي تكون قريبة من عبارة الضم مع خلاف في ترتيب الإحتمالات

وسنقوم بإيجاد عبارة الضم المطابقة للعبارة ~ (ع ← م)

ع	م	~ع	~ م	~ ع ٨ ~م	~ع ٨ م	ع٨ ~ م
ص	ص	ك	ك	ك	ك	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك

جدول رقم (9)

من مقارنة الحقلين العموديين الأخيرين للجدولين 8 ، 9 نجد انهما متطابقان تمام الإنطباق فيكون لدينا :

~ (ع ← م) ≡ ع ٨ ~ م

مبرهنة :

في العبارات الشرطية التي على شكل ع← م ، إذا كانت ~ م ← ~ع فإن ع ← م

البرهان :

نرسم جدول قيم الصدق للعبارات

ع	م	~ع	~م	ع ← م	~م ← ~ع
ص	ص	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص

جدول رقم (10)

إذن ~ م ← ~ ع ≡ ع ← م

هذه المبرهنة تطبق كثيرا في البراهين الرياضية ، وخاصة في الهندسة وتسمى برهان عكس المطلوب أو برهان التناقض .

العبارة الشرطية المترابطة : هي العبارة الشرطية التي فيها الفرض يستلزم النتيجة ، وبنفس الوقت النتيجة تستلزم الفرض في آن واحد :

ع ↔ م ، وهذا يعني إن الشرط الأول يستلزم الشرط الثاني اي إن { (ع ← م) ← (م←ع)) }∧ {(م ← ع) ← (ع ← م) } وتقرأ إذا وفقط إذا وتختصر (إذن) ، لاحظ المثال التالي :

إذا قطع مستقيمان بقاطع وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين ، كان المستقيمان متوازيين ،وإذا كان المستقيمان متوازيين فالقاطع لهما يصنع معهما زاويتين متبادلتين متساويتين .

ويمكن اختصارها الى :

إذا قطع مستقيمان بقاطع وكانت الزاويتان المتبدلتان متساويتين إذا وفقط إذا المستقيمان متوازيان .

ملاحظة مهمة : كل عبارة شرطية مترابطة هي عبارة شرطية ، ولكن ليس كل عبارة شرطية هي عبارة شرطية مترابطة .

قيم الصدق للعبارة الشرطية المترابطة

إذا كانت العبارة الشرطية ع← م صادقة

والعبارة الشرطية م ← ع صادقة

تكون العبارة الشرطية المترابطة ع ↔ م صادقة

لاحظ الجدول التالي :

ع	م	ع ← م	م ← ع	ع ↔ م
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص

جدول رقم (11)

من الجدول رقم (11) نلاحظ ان احتمالات الصدق والكذب للعبارة الشرطية المترابطة مقسمة الى احتمالين صادقين والى احتمالين كاذبين ، وهذه الأحتمالات تشابه احتمالات صدق عبارة الأختيار (اما ..... أو.....) " ṽ " بل هي تتطابق مع نفي الإختيار

لهذا فإن : ع ↔ م Ξ ~ (ع ṽ م) .....راجع جدول رقم (5) وقارنه مع جدول (11)

نفي العبارة الشرطية المترابطة

لاحظ الجدول التالي : 4↓ 5↓

ع	م	ع↔ م	~ (ع ↔ م)	ع ṽ م	4 Ξ 5
ص	ص	ص	ك	ك	ك Ξ ك
ص	ك	ك	ص	ص	ص Ξ ص
ك	ص	ك	ص	ص	ص Ξ ص
ك	ك	ص	ك	ك	ك Ξ ك

جدول رقم (12)

من الجدول رقم 12 نلاحظ ا الحقل العمودي رقم 4 Ξ الحقل العمودي رقم 5

لذلك فإن : ~ (ع ↔ م) Ξ ع ṽ م